Trigonométrie et valeurs exactes…

A) On sait déjà qu'il faut éviter au maximum les valeurs approchées, qui risquent de fausser tous les résultats d'un problème. Les Cosinus, Sinus et Tangente donnent presque toujours des valeurs approchées **sauf pour 0°, 90°, <u>et surtout 30°, 45° et 60°.</u>**

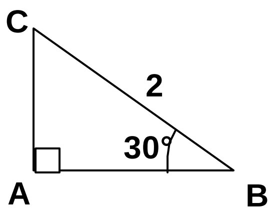
C'est pourquoi lorsque, dans un problème, vous rencontrerez un de ces trois angles, **il faudra impérativement utiliser la valeur exacte du cosinus, du sinus ou de la tangente.**

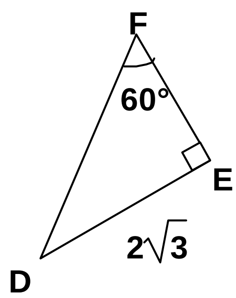
La plupart du temps, on vous rappellera cette valeur exacte, mais il n'est pas difficile de la retrouver :

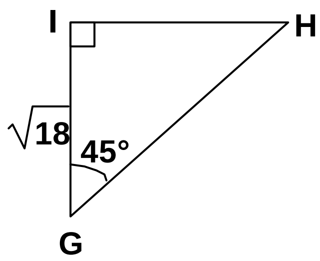
<u>A l'aide de la calculatrice, compléter avec les entiers 1, 2 ou 3 :</u>

Angle	cosinus	sinus	tangente
30°	$\frac{\sqrt{\dots}}{\dots}$	$\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{\dots}$
45°	$\frac{\sqrt{\dots}}{\dots}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{\dots}$	…
60°	$\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{\sqrt{\dots}}{\dots}$	$\sqrt{\dots}$

<u>Exercices :</u> (les exercices suivants devront être réalisés <u>sans jamais utiliser</u> les touches cos, sin ou tan qui ne donneraient qu'une valeur approchée, et de plus <u>sans utiliser la théorème de Pythagore</u> !)







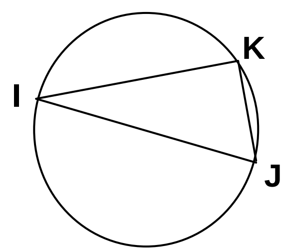
I) Déterminer en valeur exacte AB puis AC. **II)** Déterminer en valeur exacte FE puis FD.
III) Déterminer en valeur exacte GH puis IH.

B) Cercle et triangle rectangle :

Sur le cahier d'exercice, tracer un cercle de diamètre [AB]. Placer un point M_1 n'importe où sur le cercle (sauf en A ou en B !). Que peut-on dire àpriori du triangle ABM_1 ?

Placer un deuxième point M_2 sur ce cercle. Que peut-on dire àpriori du triangle ABM_2 ?

En fait, lorsqu'on relie un point d'un cercle aux extrémités d'un des diamètres de ce cercle, on obtient <u>toujours</u> un triangle rectangle. Inversement, si aucun des côtés du triangle n'est un diamètre du cercle dans lequel il est inscrit, alors on peut affirmer que ce n'est pas un triangle rectangle.



<u>Exemple :</u> « Trace un cercle de diamètre [IJ]. Place un point K sur ce cercle. Que peut-on dire du triangle IJK ? »

<u>Rédaction souhaitée :</u> **« Le triangle IJK est rectangle en K <u>car il est inscrit dans le cercle de diamètre [IJ]</u> »**

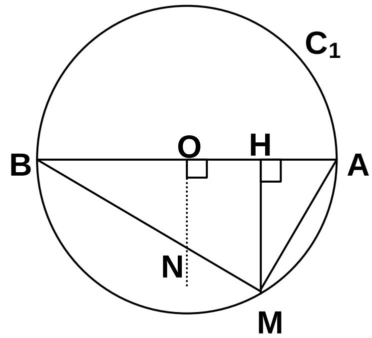
Exercices :

I) Trace en vraie grandeur un cercle C de centre O et de rayon 3 cm. Place deux points A et B tels que [AB] soit un diamètre de C. Sur C, place un point M tel que AM=3 cm.

1) Explique pourquoi AMB est rectangle en M.

2) Donne en valeur exacte MB, $\widehat{MAB}$ et $\widehat{MBA}$.

II) Soit un cercle C_1 de diamètre [AB] tel que AB=12 cm. Soit O le milieu de [AB] et H le milieu de [AO]. La perpendiculaire en H à (AB) coupe C_1 en M.



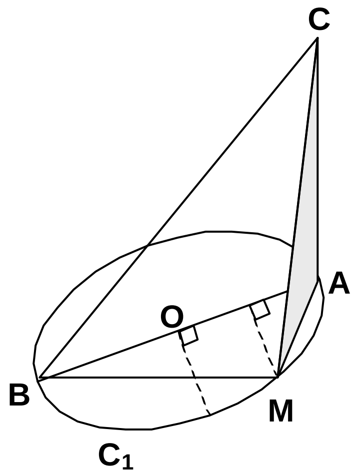
1) Quelle est la distance OM ? Justifier par une phrase.

2) Combien mesurent OH et HA? Justifier.

3) Calculer HM puis AM.

4) Après avoir expliqué pourquoi BAM est un triangle rectangle, calculer MB. Donner **en valeurs exactes** sin $\widehat{ABM}$ et cos $\widehat{ABM}$.

5) La médiatrice de [AB] coupe (MB) en N. **Sans calculer $\widehat{ABM}$** mais en utilisant les valeurs exactes des sinus et cosinus trouvées à la question précédente, et en remarquant bien sûr que $\widehat{ABM}$ = $\widehat{OBN}$ (et donc que sin $\widehat{ABM}$ = sin $\widehat{OBN}$ et cos $\widehat{ABM}$ = cos $\widehat{OBN}$), calculer en valeurs exactes NB et ON.



6) On trace maintenant la droite (AC) perpendiculaire au plan du cercle C_1, ce qui signifie notamment que les triangles CAB et CAM sont rectangles en A. On donne AC=12cm.

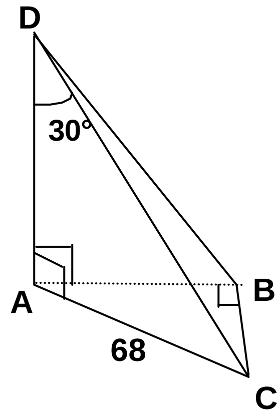
a) Calculer BC et CM.

b) Quelle est la nature du triangle CMB ?

c) Calculer **en valeur exacte** puis au **mm^3** le plus proche le volume de la pyramide CBMA (**remarque** : Dans un cm^3, il n'y a pas 10 mm^3 ! Réfléchissez !).

III) Voici une pyramide à base triangulaire. Le triangle ABC est rectangle en B. Le segment [DA] est une hauteur de la pyramide, de telle sorte que les triangles DAB et DAC sont rectangles en A.

On donne AC = 68, $\widehat{ADC}$= 30° et sin ($\widehat{BAC}$) = $\frac{15}{17}$.



Remarque : à aucun moment vous ne devrez calculer la mesure de l'angle**.** Dans cet exercice, tous les résultats devront être donnés en valeurs exactes et simplifiées**.**

1) Calculer BC et AB.

2) Calculer DC et DA.

3) Calculer DB.

4) Démontrer que le triangle DBC est rectangle en B.

5) Calculer le volume de la pyramide DABC.

<u>Correction :</u> A) cos (30°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; sin (30°)= $\frac{1}{2}$; tan (30°) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; cos (45°) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; sin (45°) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tan (45°) = 1 ; cos (60°) = $\frac{1}{2}$; sin (60°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tan (60°) = $\sqrt{3}$. **I)** AB = $\sqrt{3}$; AC = 1. **II)** FE = 2 ; FD = 4. **III)** HG = 6 ; IH = $3\sqrt{2}$. **B) I) 1)** AMB est rectangle en M car il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB]. **2)** MB = $3\sqrt{3}$; $\widehat{MAB}$= 60° ; $\widehat{MBA}$= 30°. **II) 1)** OM = 6 cm car M appartient au cercle de centre O et de rayon 6 cm. **2)** OH = HA = 3 cm car H est le milieu de [OA] et que OA = 6 cm.

3) HM = $3\sqrt{3}$ cm et AM = 6 cm. **4)** BAM est rectangle en M car il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB]. MB = $6\sqrt{3}$ cm ; sin ($\widehat{ABM}$) = $\frac{1}{2}$; cos ($\widehat{ABM}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5)** NB = $4\sqrt{3}$ cm ;

ON = $2\sqrt{3}$ cm. **6) a)** BC = $12\sqrt{2}$ cm ; CM = $6\sqrt{5}$ cm. **b)** BMC est rectangle en M. **c)** V = $72\sqrt{3}$ cm^3 $\cong$ 124,708 cm^3**.** **III) 1)** BC = 60 ; AB = 32. **2)** DC = 136 ; DA = $68\sqrt{3}$. **3)** DB = $28\sqrt{19}$. **4)** DBC est rectangle en B. **5)** Volume =$21760\sqrt{3}$.