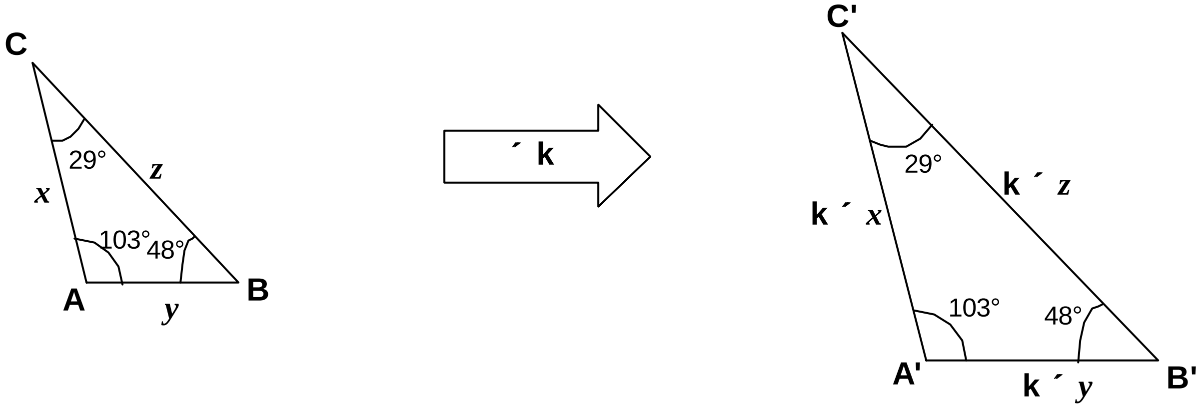
Le théorème de Thalès



Lorsqu'on agrandit un triangle en multipliant toutes ses longueurs par un coefficient k, on remarque que les angles restent inchangés.

<u>Réciproquement</u> (et beaucoup plus important !), si deux triangles ont les mêmes angles, alors on peut affirmer que <u>l'un est forcément un agrandissement de l'autre.</u>

Il ne reste plus alors qu'àdéterminer par quel nombre k on a multiplié les côtés de l'un pour obtenir l'autre.

Dans le dessin ci-dessus, on remarque aisément que [AB] se transforme en [A'B'], […..] se transforme en [B'C'] et [AC] se transforme en […..].

Divisons A'B' par AB. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{k \times y}{y} = k$.

De même, on obtiendrait $\frac{B'C'}{BC} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots} = \ldots.$ et $\frac{A'C'}{AC} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots} = \ldots$.

Donc pour trouver k, il suffit par exemple de mesurer A'B', de mesurer AB et de diviser. ***(Prenez votre règle graduée !).***

Ici, A'B'=…..cm, AB=…..cm donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{\ldots..}{\ldots..} = \ldots..$ **donc k= ….. .**

Donc on peut dire que le triangle A'B'C' est un agrandissement du triangle ABC de coefficient k = 1,5.

Remarque : Pour passer de ABC àA'B'C', on a multiplié tous les côtés par 1,5.

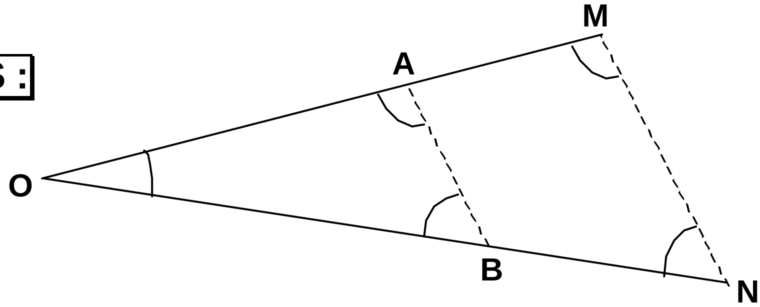
On pourrait de même passer de A'B'C' àABC en multipliant tous les côtés par 0,66666… soit $\frac{2}{3}$.

Mais lorsque le coefficient est plus petit que 1, on ne parle plus d'un agrandissement mais d'une ……………….. ; (ABC est plus petit que A'B'C' !) .

On peut dire que ABC est une **<u>réduction</u>** de A'B'C' de coefficient $\frac{2}{3}$.

Première situation de THALÈS :

Pour pouvoir utiliser cette propriété, il faut impérativement que les droites (AB) et (MN) soient parallèles !



Dans ce dessin, il y a deux triangles qui sont ……… et ……… .
Le petit triangle OAB est en fait ***àl'intérieur*** du grand triangle OMN.

Mais peut-on dire que OMN est un agrandissement de OAB ?!

Pour cela, il faudrait que leurs angles soient égaux. C'est le cas, car :

- les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{N}$ sont …………………….. *(Alternes-internes ? Alternes-externes ? Correspondants ?)* donc puisque les droites (…...) et (…..) sont parallèles, ils sont égaux.

- les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{M}$ sont ……………… donc puisque (AB) parallèle à(MN), $\widehat{A} = \widehat{M}$.

- et puisque les deux triangles ont en commun le troisième angle ($\widehat{O}$), tous leurs angles sont égaux, donc …….. est un agrandissement de ……… de coefficient k.

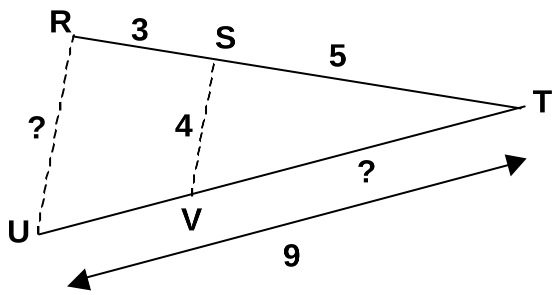
On a vu dans la première partie que $k = \frac{OM}{....}$ mais aussi que $k = \frac{....}{OB}$ et que $k = \frac{....}{....}$.

Donc : $\quad \mathbf{\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}} \quad$ *(= k)*

Théorème de THALÈS :
Dans la situation du dessin, si (AB) parallèle à (MN), alors : $\boldsymbol{\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}}$

<u>Exemple et rédaction :</u>

(RU) parallèle à (SV)



*« **Puisque (RU) est parallèle à(SV), RUT est un agrandissement de SVT. Donc d'après le théorème de Thalès :***

$\frac{RT}{ST} = \frac{UT}{VT} = \frac{RU}{SV}$ donc $\frac{8}{5} = \frac{9}{VT} = \frac{RU}{4}$.

- Déterminons VT :

$\frac{8}{5} = \frac{9}{VT}$ donc $8 \times VT = 9 \times 5$ donc $VT = \frac{45}{8}$ (= 5,625)

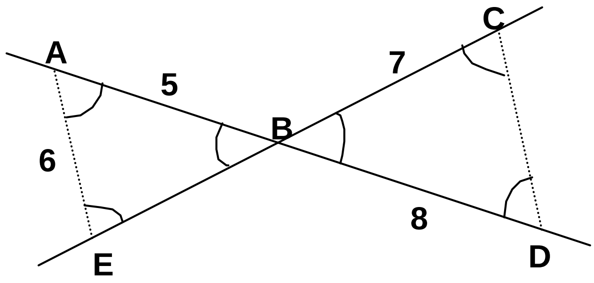
Ici, on utilise le produit en croix qui dit que :
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = c \times b$
Par exemple, $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ et $6 \times 4 = 3 \times 8$.

- Déterminons RU :

$\frac{8}{5} = \frac{RU}{4}$ donc $8 \times 4 = RU \times 5$ donc $RU = \frac{32}{5}$ (= 6,4) **»**

<u>Dernier conseil</u> : Commencez toujours par repérer le petit triangle et le grand triangle. Ecrivez d'abord la triple égalité sans valeur numérique, puis avec toutes les valeurs numériques possibles. Enfin, vous remarquerez que pour trouver une valeur, on n'a jamais besoin des trois fractions. Choisissez judicieusement deux d'entre elles !

Deuxième situation de THALÈS :



Les droites (AE) et (DC) sont bien sûr parallèles…
Puisque les droites (AE) et (DC) sont parallèles, les angles ………………………… (*Alternes-internes, alternes-externes, correspondants* ?)

$\widehat{BAE}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux.

De même, les angles alternes-internes $\widehat{BEA}$ et ……. sont égaux.

Enfin, les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{CBD}$ sont …………………………………… donc ils sont égaux.

Puisque les triangles ABE et CBD ont tous leurs angles égaux, l'un est un agrandissement de l'autre, donc on peut écrire :

« Puisque (AE) parallèle à (CD), le triangle CBD est un agrandissement du triangle ABE donc :

$$\frac{CB}{BE} = \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AE} \qquad \text{donc} \quad \frac{7}{BE} = \frac{8}{5} = \frac{CD}{6}.$$

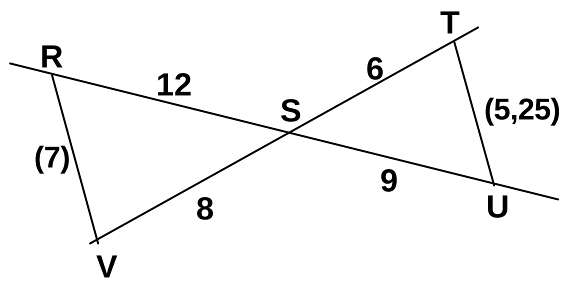
Déterminons BE : $\frac{7}{BE} = \frac{8}{5}$ donc 35 = 8BE donc BE = $\frac{35}{8}$.

Déterminons CD : $\frac{CD}{6} = \frac{8}{5}$ donc 5CD = 48 donc CD = $\frac{48}{5}$. »

Réciproque du théorème de THALÈS :

On a vu qu'avec le théorème de Thalès, on obtenait une triple égalité de fractions à condition que les points soient placés dans une des deux situations précédentes, est <u>surtout</u> **à condition d'avoir deux droites** …………………….. S'il n'y a pas de droites parallèles, il n'y a donc pas de triple égalité.
<u>Réciproquement</u>, si on a la triple égalité, alors les droites sont forcément parallèles.

<u>Exemples et rédaction :</u>



$\frac{RS}{SU} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\frac{VS}{ST} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\frac{\mathit{RV}}{\mathit{TU}} = \frac{\mathit{7}}{\mathit{5,25}} = \frac{\mathit{700}}{\mathit{525}} = \frac{\mathit{4}}{\mathit{3}}$

Puisque les points R,S,U et V,S,T sont alignés dans le même ordre et que $\frac{RS}{SU} = \frac{VS}{ST} = \frac{\mathit{RV}}{\mathit{TU}}$, les droites (RV) et (TU) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

Mais pourquoi la fraction *RV/TU* est-elle écrite en italique, et les valeurs (7) et (5,25) entre parenthèses ? Simplement parce qu'elles sont ***facultatives…*** Pour pouvoir affirmer qu'on a deux droites parallèles, il suffirait de prouver que RS/SU = VS/ST sans tenir compte des deux segments dont on veut prouver le parallélisme…